

Les algorithmes de résolution des équations cubiques chez al-Asfahānī (XIX^e siècle)

Nacéra Bensaou

Sciences, Philosophie, Histoire (SPHère – UMR 7219)
CNRS, Université Paris Diderot, Université Paris 1

Takmilat al-'Uyūn est un traité de mathématiques publié en 1824 par le mathématicien 'Alī Muḥammad ibn Muḥammad Ḥusayn al-Asfahānī pour, vraisemblablement, « compléter » *'Uyūn al-ḥisāb* de Moḥammad Bāqir al-Yazdī, mathématicien du XVII^e siècle.

Ce traité est surprenant à plus d'un titre. Restreint par le nombre de ses pages (seize folios), dense par le nombre d'algorithmes qu'il propose, il est rédigé dans la langue et le style des mathématiques arabes « traditionnelles », sans symbolisme mathématique, et pose le problème de la résolution des vingt-cinq équations cubiques, posé et résolu par ses lointains prédécesseurs des XI^e et XII^e siècles : 'Umar al-Khayyām et Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī. Ainsi, al-Asfahānī s'inscrit directement dans la tradition « al-Khayyam, al-Tusi ».

Cependant, al-Khayyām qui énumère et classe l'ensemble des équations en fonction du nombre de termes impliqués dans l'équation, adopte une approche totalement géométrique pour les résoudre. Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī complète la théorie d'al-Khayyām sans toutefois s'affranchir totalement de la géométrie. Il reclasse les équations autour de l'existence ou non des racines, il apporte d'une part un algorithme numérique d'extraction de la racine qu'il applique aux équations qui ont toujours une racine positive, et d'autre part, il résout celles qui peuvent ne pas avoir de racine par une nouvelle méthode analytique. Supposons l'équation sous la forme $f(x) = N$, alors al-Ṭūsī cherche à savoir si un point d'intersection entre $y = f(x)$ et la droite $y = N$ peut exister ou non et obtient la réponse en calculant $f(x_0)$ (le maximum de $f(x)$), et en le comparant à N . Il détermine le point x_0 en cherchant la racine d'une expression qui n'est autre que la dérivée première de $f(x)$.

Al-Asfahānī développe une approche nouvelle et totalement algébrique, sans aucun recours à la géométrie. Il classe ses équations, comme al-Khayyām, en fonction du nombre de termes impliqués dans l'équation. Pour chaque type d'équation il propose un algorithme pour la représenter en fonction de ses racines. Il résout l'ensemble des équations par différents types d'algorithmes :

- des algorithmes classiques par calcul de radicaux, connus depuis al-Khawarizmi, appliqués aux six équations du second degré ou celles qui reviennent à l'une d'entre elles ;

- des algorithmes d'extraction de la racine chiffre par chiffre « à la al-Ṭūsī » qu'il applique à l'ensemble des équations cubiques non réductibles au second degré et classées par al-Ṭūsī comme ayant toujours une solution.
- de nouveaux algorithmes d'analyse indéterminée basée soit sur la recherche et réduction de l'intervalle de la racine ou de calcul d'un point fixe d'une fonction. Ces algorithmes déterminent la solution par un processus itératif de calcul de termes d'une suite convergente. Al-Asfahānī qui justifie la convergence, applique cette dernière classe d'algorithmes à l'ensemble des équations qu'al-Ṭūsī résout par ses méthodes analytiques.
- Il combine l'extraction de la racine chiffre par chiffre à l'analyse indéterminée dans une méthode appelée « celle des deux tableaux ».

Pour certains algorithmes, al-Asfahānī propose des variantes qu'il compare vis-à-vis de la longueur des calculs. L'algorithme d'extraction, chiffre par chiffre, de la racine d'une équation cubique d'al-Asfahānī appartient sans aucun doute à la tradition des mathématiciens arabes depuis les travaux arithmétiques sur l'extraction des racines des nombres d'al-Khawarizmi et ses premiers successeurs jusqu'à al-Ṭūsī qui l'étend aux équations cubiques, puis jusqu'à al-Yazdī qui l'exploite pour résoudre plusieurs équations de degré supérieur à trois.

Par ailleurs, les sources de certains algorithmes d'analyse indéterminée qu'al-Asfahānī propose semblent exister dans la tradition des mathématiciens astronomes qui ont développé le calcul trigonométrique et en particulier la table des sinus et des algorithmes approchés d'interpolation de plus en plus précis initiés dès le XI^e siècle. Un des mathématiciens du XV^e siècle de cette tradition, des plus proches prédécesseurs d'al-Asfahānī, est Ghayāthu al-Dīn al-Kāshī qui développe une méthode itérative pour le calcul de sinus 1° (basé sur la résolution d'une équation cubique) très similaire à un algorithme d'al-Asfahānī.

Al-Asfahānī est un savant Iranien né en 1800 à Isfahān et décédé à Téhéran en 1878. Mathématicien et astronome, il écrit en arabe et en persan. En mathématiques, il publie *Takmilat al 'Uyūn*, un traité sur la division de la sphère par des plans, où il cite explicitement Ibn Sahl, al-Qūhī et Archimède, un traité sur les propriétés des nombres et un traité sur le logarithme. En 1857 il est enseignant à Dār al-Funūn où il est en contact avec des enseignants de l'école d'Isfahān mais aussi avec des enseignants occidentaux.